

柔性臂约束/非约束模态降维模型精度分析

赵宝山¹, 赵志刚¹, 王利平², 张刘³, 齐乃明¹

(1. 哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001; 2. 天津航天机电设备研究所, 天津 300300;
3. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 长春 130033)

摘要: 针对柔性机械臂约束、非约束模态降维的动力学绝对误差问题, 可采用有限元法描述柔性变形, 并应用拉格朗日法建立其动力学模型, 分别利用约束和非约束模态进行降维, 来比对两种降维方法的绝对精度。仿真结果表明: 约束、非约束模态降维模型都具有较高的动力学精度, 取相同阶数的非约束模态动力学精度更高, 而约束模态的误差具有随时间累积的特点。

关键词: 柔性机械臂; 有限元法; 动力学方程; 约束模态; 非约束模态; 绝对误差

中图分类号: V414.3

文献标识码: A

文章编号: 1673-1379(2012)03-0287-05

DOI: 10.3969/j.issn.1673-1379.2012.03.010

0 引言

随着执行空间任务的多样化, 航天器复杂化、大型化是一个重要的发展方向。在发射能力和发射成本的约束条件下, 需要降低大型航天器的结构质量, 因此采用轻质柔性结构成为现代航天器的一大重要技术举措^[1]。

柔性机械臂的振动模态是无穷维的, 很难且无须对所有的振动模态进行控制。实际工程中往往根据任务的要求, 只考虑对系统影响较大的若干阶模态, 所以必须进行模态截断即模态降维。

柔性机械臂振动模态降维方法主要有两种: 约束模态(或称之为部件模态)和非约束模态(或系统模态)。前者定义为飞行器中心刚体固定, 且不受任何外部干扰的柔性部件无阻尼自由振动解^[2], 这种情况接近于空间机械臂、大型太阳翼等空间机构地面测试状态。后者定义为飞行器不受外部干扰情况下获得的无阻尼自由运动解^[3], 在这种情况下, 整个结构由于挠性体和刚体的耦合特性, 其解与刚体质量特性和柔性体振动特性都有关^[4-6]。

文献[7]针对挠性航天器的大角度机动柔性附件的振动抑制问题, 应用非约束模态级数法建立了姿态运动和挠性结构振动解耦的方程来为分力合成控制器设计提供便利, 但是未考虑降维模型的近似动力学精度问题。

本文针对上述问题, 以柔性机械臂为研究对象, 采用有限元法描述其弹性变形, 并应用拉格朗日法建立其动力学方程, 来分析约束模态和非约束模态动力学的绝对误差。

1 柔性机械臂动力学建模

1.1 柔性机械臂描述

柔性机械臂的简化模型如图1所示, 由刚性电机转子及连接法兰(A)、柔性臂杆(B)及末端刚性负载(C)组成。其中, $O_a - x_a y_a z_a$ 、 $O_b - x_b y_b z_b$ 、 $O_c - x_c y_c z_c$ 分别为A、B和C三构件的固连坐标系, 三者平行; ρ_a 表示 O_a 点至A构件任意质量微元 dm 的矢径; $r_a = e^{(A)T} [r_a \ 0 \ 0]^T$ 表示 O_a 点至 O_b 点的矢径, 其中 $e^{(A)}$ 表示A构件的固连坐标系的基矢, 上角标T表示转置; ρ_b 表示 O_b 点至B构件任意质量微元 dm 的矢径; δ_b 表示B构件质量微元 dm 的弹性变形; $r_b = e^{(A)T} [r_b \ 0 \ 0]^T$ 表示 O_b 点至B构件末端等效几何中心 O_c 点的矢径; δ_p 表示B构件末端弹性变形; ρ_c 表示 O_c 点至C构件任意质量微元 dm 的矢径; $\dot{\theta} = e^{(A)T} [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T$ 表示A构件的角速度。

对系统作如下假设:

- 1) 系统在水平面内转动, 忽略重力、空气阻力及结构阻尼影响;
- 2) 臂杆长度远大于其截面尺寸, 只考虑其

收稿日期: 2012-02-17; 修回日期: 2012-03-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 61171189); 航天科技创新基金资助项目(编号: CASC200902-81)

作者简介: 赵宝山(1979—), 男, 博士学位, 研究方向为柔性机械臂动力学与主动振动抑制; E-mail: bszhaohit@126.com。

$O_b x_b z_b$ 面内的弯曲振动, 忽略关节柔性;

3) O_c 点为 C 构件的质心;

4) $\dot{\theta}$ 、 $\dot{\delta}_b$ 、 $\dot{\delta}_p$ 均视为一阶小量, 忽略速度项中两者的向量积。

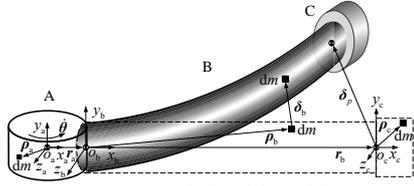


图1 柔性机械臂简化模型
Fig. 1 Flexible manipulator model

1.2 动力学建模

A、B、C 三构件的质量微元 dm 的速度 v_a 、 v_b 、 v_c 可表示为

$$\begin{cases} v_a = \dot{\theta} \times \rho_a; \\ v_b = \dot{\theta} \times (r_a + \rho_b) + \dot{\delta}_b; \\ v_c = \dot{\theta} \times (r_a + r_b + \rho_c) + \dot{\theta}_p \times \rho_c + \dot{\delta}_p; \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\theta_p = e^{(A)T} [0 \ \theta_p \ 0]^T$ 表示 B 构件末端弹性变形角。

系统拉格朗日函数 L 为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=a,b,c} \int_{\kappa} v_{\kappa} \cdot v_{\kappa} dm - \frac{1}{2} \int_b \varepsilon_b^T \cdot \sigma_b dV, \quad (2)$$

式中： ε_b 、 σ_b 分别表示 B 构件的应变、应力矢量； dV 表示体积微元。

将式(1)代入式(2)并应用拉格朗日方程, 可得由系统广义自由度 θ 和 d 表征的动力学方程

$$\begin{bmatrix} J & I \\ I^T & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中： J 为系统绕 $O_a y_a$ 轴的转动惯量； I 为刚柔耦合矩阵； M 为柔性体质量阵； K 为柔性体刚度阵； d 为 B 构件节点位移列阵； T 为控制力矩。前四者的表达式为

$$\begin{cases} J = \sum_{\kappa=a,b,c} J_{\kappa y}^a; \\ K = \sum_{i=1}^n (P_i^{eT} K^e P_i^e); \\ M = \sum_{i=1}^n (P_i^{eT} M^e P_i^e) + m_c P_w^T P_w + J_{cy} P_{\theta}^T P_{\theta}; \\ I = 2J_{cy} P_{\theta} - m_c (r_a + r_b) P_w - \\ \rho_x \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{e_i} \left(r_a + \frac{i-1}{n} r_b + x_{e_i} \right) N^e dx_{e_i} \right\} P_i^e \end{cases} \quad (4)$$

式中： $J_{\kappa y}^a$ ($\kappa = a, b, c$) 分别为 A、B 和 C 三构件绕 y_a 轴的转动惯量； n 为 B 构件有限单元体个数； P_i^e 为 B 构件第 i 个单元体的联系矩阵； M^e 为 B 构件单元质量阵； m_c 为 C 构件质量； P_w 为 B 构件末端弹性变形联系矩阵； J_{cy} 为 C 构件绕其 y_c 轴的转动惯量； P_{θ} 为 B 构件末端弹性变形角联系矩阵； K^e 为 B 构件单元刚度阵； ρ_x 为 B 构件线密度； e_i 为 B 构件第 i 个单元体； N^e 为 B 构件单元型函数。

2 动力学降维

2.1 基于约束模态法的动力学降维

令中心刚体静止, 可得 B 构件约束模态振动方程为

$$M \ddot{d}_c + K d_c = 0, \quad (5)$$

其中 d_c 表示约束模态下的节点位移列阵。

令 $d_c = \Phi_{ck} e^{j \omega_{ck} t}$, 其中 $j^2 = -1$, Φ_{ck} 、 ω_{ck} 分别表示第 k 阶约束模态振型和频率, 将其代入式(5)中, 可得约束模态特征方程为

$$\omega_{ck}^2 M \Phi_{ck} = K \Phi_{ck}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n. \quad (6)$$

约束模态振型正交方程为

$$\begin{cases} \Phi_c^T M \Phi_c = E_{2n} \\ \Phi_c^T K \Phi_c = \text{diag}(\omega_{c1}^2, \dots, \omega_{c2n}^2) \end{cases}; \quad (7)$$

式中： Φ_c 为约束模态振型矩阵； E_{2n} 为 $2n$ 维单位阵。

令 $d = \sum_{i=1}^{N_c} \Phi_{ci} \eta_{ci}$, 其中 η_{ci} 表示第 i 阶约束模态坐标, N_c 表示介于 $1 \sim 2n$ 之间的约束模态截断阶数,

将其代入式(3), 并结合式(7)可得约束模态降维后的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} J & H_c \\ H_c^T & E_{N_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_c \\ \ddot{\eta}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \eta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中： H_c 为 $1 \times N_c$ 维的模态坐标耦合矩阵, $H_{ci} = I \Phi_{ci}$; $\omega_c = \text{diag}(\omega_{c1}, \dots, \omega_{cN_c})$, 为约束模态矩阵； η_c 为约束模态坐标向量, 表示为 $\eta_c = [\eta_{c1}, \dots, \eta_{cN_c}]^T$ 。

2.2 基于非约束模态法的动力学降维

令驱动力矩 $T = 0$, 可得系统非约束模态方程式为

$$\begin{bmatrix} J & I \\ I^T & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_u \\ \ddot{d}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_u \\ d_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中 θ_u 、 d_u 分别表示非约束模态下的 A 构件转角和 B 构件节点位移列阵。

令 $\theta_u = \Phi_{uk} e^{j\omega_{uk}t}$ 、 $d_u = D_{uk} e^{j\omega_{uk}t}$ ($k=1, 2, \dots, N_u$), 其中 D_{uk} 为第 k 阶非约束模态振型, $\Phi_u = [\Phi_{uk}]$ 为诱导振型, ω_{uk} 表示第 k 阶非约束模态频率, N_u 表示介于 $1 \sim 2n$ 之间的非约束模态截断阶数。将它们代入式(9)中, 可得非约束模态特征方程为

$$\omega_{uk}^2 \left(M - \frac{1}{J} I^T I \right) D_{uk} = K D_{uk}, \quad \Phi_{uk} = -\frac{1}{J} I D_{uk} \quad (10)$$

非约束模态振型正交方程为

$$\begin{cases} D_u^T \left(M - \frac{1}{J} I^T I \right) D_u = E_{2n}; \\ D_u^T K D_u = \text{diag}(\omega_{u1}^2, \dots, \omega_{u2n}^2); \end{cases} \quad (11)$$

其中 D_u 为非约束模态振型矩阵。

非约束模态求解方程为

$$\theta = \theta_u - \sum_{i=1}^{N_u} \frac{1}{J} I D_{ui} \eta_{ui}, \quad d = \sum_{i=1}^{N_u} D_{ui} \eta_{ui} \quad (12)$$

式中: θ_u 表示将B构件视为刚体时的系统转角; η_{ui} 表示第 i 阶非约束模态坐标。

将式(12)代入式(3)并结合式(11)可得非约束模态动力学方程为

$$\begin{bmatrix} J & \mathbf{0} \\ H_u & E_{N_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_u \\ \ddot{\eta}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega_u^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_u \\ \eta_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: H_u 为 $N_u \times 1$ 维的模态坐标耦合矩阵, 表达式为 $H_{ui} = D_{ui}^T I^T$; $\eta_u = [\eta_{u1}, \dots, \eta_{uN_u}]^T$ 为非约束模态坐标向量; $\omega_u = \text{diag}(\omega_{u1}, \dots, \omega_{uN_u})$ 为非约束模态矩阵。

3 仿真分析

柔性机械臂系统(见图1)主要参数如下。

A 构件的参数: 转动惯量 $J_{ay}=40 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, O_a 点到 O_b 点之间的距离 $r_a=0.5 \text{ m}$ 。B 构件的参数: 密度 $\rho=100 \text{ kg/m}^3$, 外圆直径 $D_o=0.2 \text{ m}$, 内圆直径 $D_i=0.198 \text{ m}$, 臂杆长度 $l_b=10 \text{ m}$, 弹性模量 $E=1 \text{ GPa}$ 。C 构件的参数: 转动惯量 $J_{cy}=2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 质量 $m_c=2 \text{ kg}$ 。有限单元体个数 $n=10$, 初始状态为 0。

3.1 约束/非约束模态频率分析

由式(6)和式(10)分别求出系统约束、非约束模态频率, 见表1。表1的结果表明: 各阶约束模态频率均小于非约束模态频率, 这一点在模态阶数较低时尤为明显; 模态阶数较高时, 二者频率基本相等。

表1 约束、非约束模态频率

Table 1 Frequencies under constraint and unconstraint modes

模态阶数	约束模态/Hz	非约束模态/Hz
1	0.3275	0.9229
2	3.4017	3.4028
3	9.1453	9.3963
4	22.4248	22.4271
5	43.2550	43.3252
6	71.2867	71.2899
7	106.6182	106.6542

3.2 绝对误差仿真分析

利用 $N_c=2$ 的约束模态动力学式(8)、 $N_u=2$ 的非约束模态动力学式(13)和广义自由度动力学式(3), 在常值力矩 $T=5 \text{ N}\cdot\text{m}$ 的作用下, 分别计算 A 构件转角和 B 构件节点位移列阵, 前二者的计算结果分别与后者做差, 来表征降维方程式(8)和式(13)的动力学绝对误差。考虑到 B 构件自由度应由有限元的所有节点位移列阵表征, 但一般情况下末端变形量较大, 因此选用 B 构件末端弹性变形 ω_p 、变形角 θ_p 以及 A 构件的转角 θ 来表征系统绝对误差, 分析结果见图2~图5。其中, 图2为 A 构件转角曲线; 图3为 A 构件转角误差曲线; 图4为 B 构件末端弹性变形误差曲线; 图5为 B 构件末端弹性变形角误差曲线。

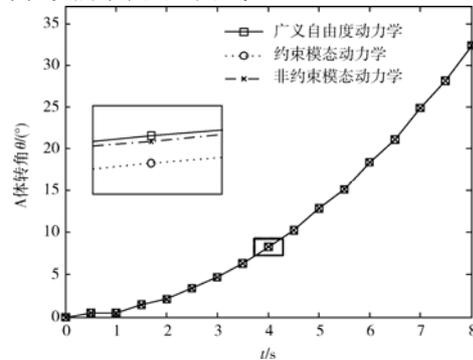


图2 A 构件转角的变化
Fig. 2 Angle variation for body A

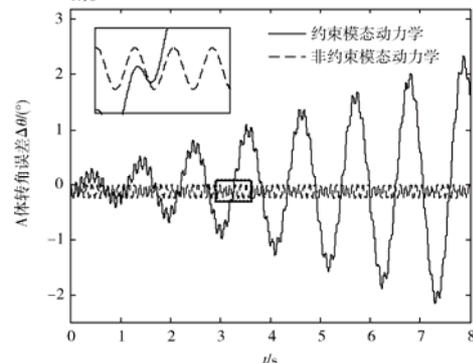


图3 A 构件转角误差
Fig. 3 Angle error of body A

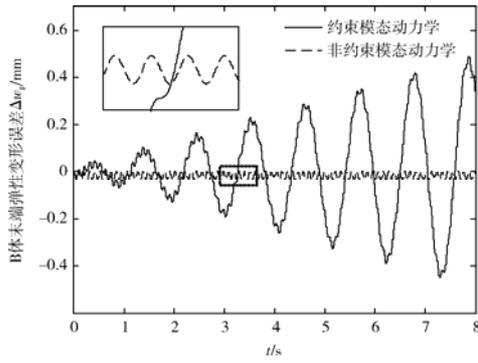


图4 B 构件末端弹性变形误差
Fig. 4 Terminal deformation error of body B

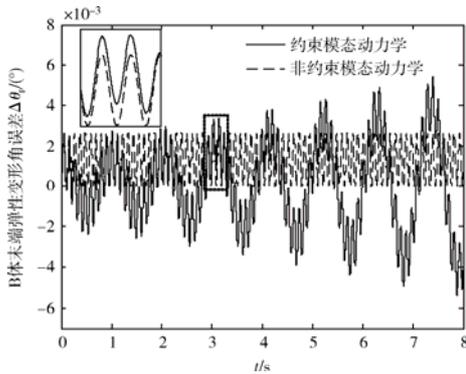


图5 B 构件末端弹性变形角误差
Fig. 5 Terminal deformation angle error of body B
仿真分析结果表明:

- 1) 仅取前 2 阶的约束、非约束模态动力学与广义自由度动力学的 A 构件转角几乎完全一致。
- 2) 在 8 s 的仿真时间内, 约束、非约束模态动力学在 θ 、 w_p 和 θ_p 上的绝对误差都很小, 因此两者均可以近似表征广义自由度动力学。
- 3) 取相同阶数的非约束模态动力学较约束模态动力学具有更高的动力学精度。此外, 约束模态动力学的绝对误差随时间累积, 但非约束模态动力学绝对误差比较稳定。

图 6 为取 $N_c=5$ 、 $N_u=3$ 的约束和非约束模态动力学 A 构件转角误差曲线, 表明约束模态截断阶数较高时才能得到与非约束模态相近的动力学精度。图 7 为 $N_c=3$ 、仿真步长为 10^{-3} s 时, 约束模态动力学 B 构件末端弹性变形误差傅里叶分析曲线, 绝对误差由 6 个频率体现, 分别与第 1 阶和第 3~6 阶非约束模态对应 (见表 1), 其中第 1 阶频率能量最高, 其振幅约为 2.7×10^{-3} mm。之所以未出现第 2 阶非约束模态是因为约束和非约束在此两阶模态上极为相近的缘故; 第 6 阶之后的频率较高, 常值力矩 $T=5$ N·m 激起的振动幅值很小, 可忽略不计。

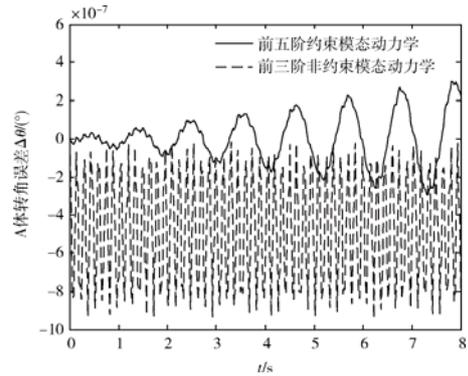


图6 A 构件转角误差
Fig. 6 Angle error of body A

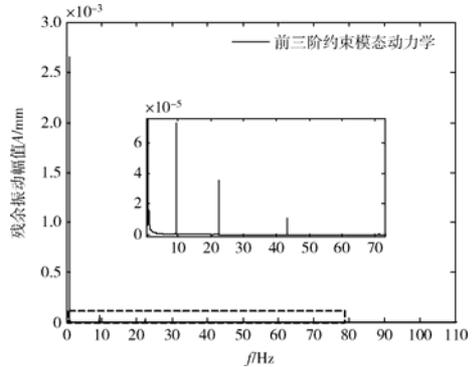


图7 B 构件末端弹性变形误差傅里叶分析
Fig. 7 FFT analysis of terminal deformation error for body B

图 8 为 $N_u=3$ 非约束模态动力学 B 构件末端弹性变形误差的傅里叶分析曲线。绝对误差主要含有 3 个频率, 分别与第 4~6 阶的非约束模态对应 (见表 1), 其中第 4 阶频率能量最高, 其振幅约为 3.5×10^5 mm。由于非约束各阶模态的相互解耦特性, 其动力学绝对误差由截断模态之后的频率决定; 且考虑到常值力矩 $T=5$ N·m 所激起的前 6 阶非约束模态振幅较大, 而其的高阶模态振幅较小, 故而绝对误差由能量较高的第 4 阶和第 5 阶非约束模态频率体现。

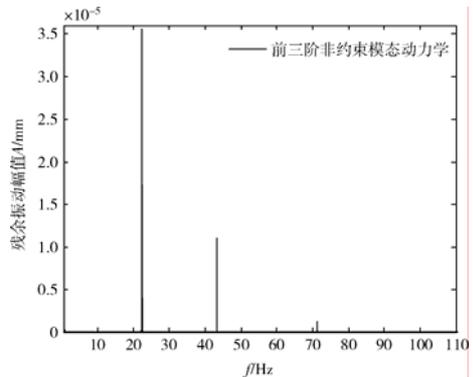


图8 B 构件末端弹性变形误差傅里叶分析
Fig. 8 FFT analysis of terminal deformation error for body B

4 结论

本文采用有限元法描述柔性机械臂的变形,应用拉格朗日法建立其动力学模型,分别用约束和非约束模态法对模型降维,仿真分析常值驱动力矩下两种降维模型的动力学绝对误差。获得主要结论如下:

1) 取较低维数的约束、非约束模态动力学绝对误差都很小,因此两者均可以近似表征广义自由度动力学,为动力学仿真与控制系统设计提供便利;

2) 相同截断阶数的非约束模态动力学较约束模态动力学具有更高的动力学精度,约束模态动力学的绝对误差随时间累积,而非约束模态动力学绝对误差比较稳定;

3) 约束模态、非约束模态降维模型的绝对误差都可以非约束模态频率体现出来,原因在于系统振动是由各阶非约束模态振型叠加而成。

参考文献 (References)

- [1] 陕晋军, 关英姿, 王凤鸣, 等. 挠性结构的约束模态及非约束模态解法[J]. 上海航天, 2000, 17(5): 19-27
Shan Jinjun, Guan Yingzi, Wang Fengming, et al. Solutions of constrained mode and unconstrained mode of flexible structure[J]. Aerospace Shanghai, 2000, 17(5): 19-27
- [2] 徐小胜, 于登云, 曲广吉. 用于惯性完备性降价的模态恒等式研究[J]. 航天器工程, 2003, 12(2): 23-34
Xu Xiaosheng, Yu Dengyun, Qu Guangji. Research on modal identity for inertial completion[J]. Spacecraft Engineering, 2003, 12(2): 23-34
- [3] 刘瞰, 杨大明. 带挠性附件卫星的模型化及截断[J]. 宇航学报, 1989(4): 87-95
Liu Dun, Yang Daming. Modeling of spacecraft with flexible appendages and model truncation[J]. Journal of Astronautics, 1989(4): 87-95
- [4] 陕晋军, 刘瞰, 齐乃明, 等. 再谈一类挠性结构的约束及非约束模态解法[J]. 中国空间科学技术, 2001, 21(1): 13-19
Shan Jinjun, Liu Dun, Qi Naiming, et al. Re-discuss the solution of constrained and unconstrained mode for a kind of flexible structure[J]. Chinese Space Science and Technology, 2001, 21(1): 13-19
- [5] Barbieri E, Ozguner U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link[J]. Transaction of ASME, 1988, 110(6): 416-421
- [6] Hablani H B. Constrained and unconstrained modes: some modeling aspects of flexible spacecraft[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982, 5(2): 164-173
- [7] 张建英. 挠性航天器姿态机动中的分力合成主动振动抑制方法研究[D]. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 2009

The precision analysis of constrained and unconstrained mode dimension reduction model for flexible manipulator

Zhao Baoshan¹, Zhao Zhigang¹, Wang Liping², Zhang Liu³, Qi Naiming¹

(1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. Tianjin Institute of Astronautics Electromechanical Device, Tianjin 300300, China;

3. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

Abstract: To study the precision of the constrained and unconstrained mode dimension reduction model for flexible manipulator, the finite element method is applied to describe the flexible deformation, the Lagrange method is used to establish the dynamical model; and then the dimension is reduced by the constrained and unconstrained mode method; in the end, the absolute errors of the two dimensional reduction method are analyzed. The simulation results show that both models have a good performance in the precision of dynamics. The unconstrained mode dynamic model has a higher precision when considering the same order, the absolute error of the constraint mode model has the nature of accumulation over time.

Key words: flexible manipulator; finite element method; dynamics equations; constraint modal; unconstrained modal; absolute error